Análisis Matemático III. Curso 4.
Examen Parcial. Primera fecha. 4 de noviembre de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. Los requisitos para aprobar están detallados en el instructivo publicado en el aula virtual de este curso.

1. Mostrar que la función $u(x,y) = e^{1-x}\cos y$ es armónica en $\mathbb{R}^2$ y hallar su conjugada armónica $v(x,y)$. Calcular la integral de $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ para $z = x+iy$ sobre la curva descripta por $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 5y^2 = 1, y \leqslant 0\}$ con punto inicial $(1/2, 0)$.

2. Hallar una transformación conforme que transforme el conjunto D_1 en D_2 siendo $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1/2| < 2\,, |z + 1/2| < 2\}$ y $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im} z| < 1\}$. ¿Es la transformación hallada una homografía? En caso negativo, ¿existe una homografía tal que $T(D_1) = D_2$?

3. Sea C la circunferencia centrada en -1 y de radio 3.

   i) Determinar una rama F de $\log(z+5)$ que sea holomorfa en un abierto que contenga a C. Obtener, si existen, $F(-4+i)$ y $F(-4-i)$, especificando su parte real y su parte imaginaria en ambos casos.

   ii) Calcular $I_k = \displaystyle\int_C \frac{F(z)}{(z+1-i)^k}\,dz$ para $k = 0, 1, 2$. Estudiar cuáles de los valores I_k se relacionan con alguno de los coeficientes del desarrollo de Taylor de F centrado en $-1+i$, indicando cómo y con qué coeficientes se relacionan.

4. Hallar y clasificar las singularidades en $\mathbb{C}^*$ de la función $f(z) = \dfrac{(16z^2+1)e^{1/z}}{z(e^{4\pi z}+1)}$. Calcular $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$, siendo C la circunferencia de centro $\dfrac{i}{2}$ y radio $\dfrac{3}{8}$, recorrida en sentido positivo. ¿Existe desarrollo de f en serie de Laurent en potencias de z en un entorno de cero? En tal serie, ¿hay finitos o infinitos términos con exponentes negativos?